

Correction Devoir maison n°4

Exercice 1 - Calculs de Sommes et de Produits

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Il y a deux façons de résoudre cette question.

(a) (En admettant le résultat concernant la somme des k^3). Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) &= 2 \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k = 2 \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} (n(n+1) - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2} \end{aligned}$$

On a donc bien obtenu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}.$$

(b) Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}.$$

Tout d'abord, on a $1(2 \times 1^2 - 1) = 1$ et $\frac{1(1+1)(1+1-1)}{2} = 1$ donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que :

$$\sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2},$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(2k^2 - 1) &= \sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) + (n+1)(2(n+1)^2 - 1) \\ &= \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2} + (n+1)(2n^2 + 4n + 1) \\ &= \frac{n+1}{2} (n(n^2 + n - 1) + 2(2n^2 + 4n + 1)) \\ &= \frac{n+1}{2} (n^3 + 5n^2 + 7n + 2) \end{aligned}$$

De plus,

$$(n+2) \left((n+1)^2 + n + 1 - 1 \right) = (n+2)(n^2 + 3n + 1) = n^3 + 5n^2 + 7n + 2,$$

Pour résumer, on a obtenu que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(2k^2 - 1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)^2 + (n+1) - 1)}{2}.$$

L'égalité reste vraie au rang $n + 1$.

On peut ainsi affirmer, d'après le principe de récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}.$$

2. Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \prod_{k=1}^n e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right).$$

Tout d'abord,

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \prod_{k=1}^1 e^{x_k} = e^{x_1} = \exp\left(\sum_{k=1}^1 x_k\right),$$

donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \prod_{k=1}^n e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right).$$

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a alors

$$\prod_{k=1}^{n+1} e^{x_k} = \left(\prod_{k=1}^n e^{x_k}\right) e^{x_{n+1}} = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) e^{x_{n+1}} = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right).$$

Ainsi l'égalité reste vraie au rang $n + 1$.

On a obtenu, d'après le principe de récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \prod_{k=1}^n e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right).$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} (4^{2-k} + 5^k 6^{n-k+1}) &= \sum_{k=2}^{n-1} 4^{2-k} + \sum_{k=2}^{n-1} 5^k 6^{n-k+1} = 4^2 \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k + 6^{n+1} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^k \\ &= 4^2 \frac{1}{4^2} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1-2+1}}{1 - \frac{1}{4}} + 6^{n+1} \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1-2+1}}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) + 6^{n+1} \left(\frac{5}{6}\right)^2 6 \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right) \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) + 6^n 5^2 \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right) \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) + 25 (6^n - 6^2 5^{n-2}) \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) + 25 \times 6^n - 6^2 \times 5^n \end{aligned}$$

On a obtenu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \sum_{k=2}^{n-1} (4^{2-k} + 5^k 6^{n-k+1}) = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) + 25 \times 6^n - 36 \times 5^n$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{n+1} 2^{3k+2} \binom{n}{k-1} &= \sum_{i=2}^n 2^{3i+5} \binom{n}{i} \quad \text{changement d'indice } i = k - 1 \\ &= 2^5 \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} 8^i \\ &= 2^5 \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 8^i 1^{n-i} - \binom{n}{0} 8^0 - \binom{n}{1} 8^1 \right) \\ &= 2^5 ((8+1)^n - 1 - 8n) \end{aligned}$$

Pour conclure,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{k=3}^{n+1} 2^{3k+2} \binom{n}{k-1} = 32(9^n - 8n - 1)$$

4. Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Tout d'abord, $\prod_{k=1}^1 \frac{2k}{2k+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ et $\frac{2^2(1!)^2}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ donc l'égalité est vérifiée pour $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1} &= \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \right) \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{2(n+1)}{2n+3} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{2(n+1)}{2n+3} \frac{2n+2}{2n+2} \\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2 2^2 (n+1)^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2(n+1)} ((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!} \end{aligned}$$

et l'égalité reste vraie au rang $n+1$. On a finalement obtenu, d'après le principe de récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Variante :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que :

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{\prod_{k=1}^n 2k}{\prod_{k=1}^n (2k+1)} = \frac{2^n \prod_{k=1}^n k}{\prod_{k=1}^n (2k+1)} = \frac{2^n n!}{\prod_{k=1}^n (2k+1)}.$$

Écrivons plus simplement le dénominateur. On voit qu'il est composé uniquement des termes impairs de 1 à $2n+1$, on peut faire apparaître les termes pairs ainsi :

$$\prod_{k=1}^n (2k+1) = 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1) = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (2n) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

On obtient finalement, puisque $(2^n n!)(2^n n!) = 2^{2n}(n!)^2$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 2 - Matrice

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité d'ordre 4.

1. On remarque que :

$$(a-b)I + bJ = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = A$$

$$\boxed{(a-b)I + bJ = A.}$$

2. En calculant J^2 on obtient

$$J^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4J$$

$$\boxed{J^2 = 4J.}$$

Montrons par récurrence sur p que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, J^p = 4^{p-1}J.$$

Tout d'abord, $4^{1-1}J = 4^0J = J$ donc l'égalité est vraie pour $p = 1$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $J^p = 4^{p-1}J$, alors

$$J^{p+1} = J^p J = 4^{p-1}J J = 4^{p-1}4J = 4^{p+1-1}J$$

donc l'égalité reste vraie pour $p + 1$.

On a obtenu, d'après le principe de récurrence, que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, J^p = 4^{p-1}J.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, J^p = \begin{cases} I & \text{si } p = 0, \\ 4^{p-1}J & \text{si } p \geq 1. \end{cases}}$$

3. Calculons A^2 et A^3 :

$$\begin{aligned} A^2 &= ((a-b)I + bJ)^2 = (a-b)^2I^2 + (a-b)bIJ + (a-b)bJI + b^2J^2 \\ &= (a-b)^2I + (2b(a-b) + 4b^2)J = (a-b)^2I + 2b(a+b)J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= ((a-b)^2I + 2b(a+b)J)((a-b)I + bJ) \\ &= (a-b)^3I^2 + b(a-b)IJ + 2b(a+b)(a-b)JI + 2b^2(a-b)J^2 \\ &= (a-b)^3I + b(a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 - 2b^2 + 8ab + 8b^2)J \\ &= (a-b)^3I + b(3a^2 + 6ab + 7b^2)J \end{aligned}$$

$$\boxed{A^2 = (a-b)^2I + 2b(a+b)J, \quad A^3 = (a-b)^3I + b(3a^2 + 6ab + 7b^2)J.}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{k-1} b^k (a-b)^{n-k} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (4b)^k (a-b)^{n-k} \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (4b)^k (a-b)^{n-k} - \binom{n}{0} (4b)^0 (a-b)^n \right) \\ &= \frac{1}{4} ((a-b+4b)^n - (a-b)^n) \end{aligned}$$

On a ainsi bien obtenu

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{k-1} b^k (a-b)^{n-k} = \frac{1}{4} ((a+3b)^n - (a-b)^n).}$$

Variante : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, grâce à la formule du binôme on a

$$\begin{aligned} (a+3b)^n - (a-b)^n &= ((a-b)+4b)^n - ((a-b)+0)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} 0^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} ((4b)^k - 0^k) = \binom{n}{0} (a-b)^n (1-1) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^k \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} 4^k b^k = 4 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} 4^{k-1} b^k \end{aligned}$$

On a ainsi bien obtenu

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{k-1} b^k (a-b)^{n-k} = \frac{1}{4} ((a+3b)^n - (a-b)^n).}$$

(b) I et J commutent (car I est la matrice identité d'ordre 4) donc, d'après la formule du binôme, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (b^k J^k) ((a-b)^{n-k} I^{n-k}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k (a-b)^{n-k} J^k \\ &= \binom{n}{0} b^0 (a-b)^n I + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{k-1} b^k (a-b)^{n-k} \right) J = (a-b)^n I + \frac{1}{4} ((a+3b)^n - (a-b)^n) J. \end{aligned}$$

Pour résumer :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{cases} I & \text{si } n = 0 \\ (a-b)^n I + \frac{1}{4} ((a+3b)^n - (a-b)^n) J & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}$$

5. D'après les questions (1) et (3) on a

$$\begin{aligned} A^2 &= (a-b)^2 I + 2(a+b)bJ = (a-b)^2 I + 2(a+b)(A - (a-b)I) \\ &= 2(a+b)A + (a-b)(a-b-2(a+b))I = 2(a+b)A - (a-b)(3b+a)I \end{aligned}$$

$$\boxed{A^2 = 2(a+b)A + (b-a)(3b+a)I.}$$

On a donc

$$A(A - 2(a+b)I) = (b-a)(3b+a)I$$

Ainsi, si $a \neq b$ et si $a \neq -3b$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{(b-a)(3b+a)}(A - 2(a+b)I).$$

Si $a = b$ alors $A^2 = 4aA$ donc, si A était inversible, on aurait $A^{-1}A^2 = A$ et $A^{-1}A^2 = 4aI$ donc A serait diagonale. Or le seul cas où A est diagonale serait pour $a = 0$ mais dans ce cas $A = 0$ et 0 n'est pas inversible. Finalement, si $a = b$ alors A n'est pas inversible.

Si $a = -3b$ alors $A^2 = 4bA$ et, pour les mêmes raisons que le cas précédent, A n'est pas inversible. Pour résumer :

A est inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq -3b$ et, dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{(b-a)(3b+a)}(A - 2(a+b)I)$$

6. Tout d'abord, puisque $A = (a-b)I + bJ$, on a

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{(b-a)(3b+a)}(bJ + ((a-b) - 2(a+b))I) \\ &= \frac{1}{(b-a)(3b+a)}(bJ - (3b+a)I) \end{aligned}$$

Avec $n = -1$, dans le cas $a \neq b$ et $a \neq -3b$, la formule obtenu à la question (4)(b) devient :

$$\begin{aligned} (a-b)^{-1}I + \frac{1}{4} \left((a+3b)^{-1} - (a-b)^{-1} \right) J &= \frac{1}{a-b}I + \frac{1}{4} \frac{a-b-a-3b}{(a+3b)(a-b)}J \\ &= \frac{1}{a-b}I - \frac{b}{(a+3b)(a-b)}J \\ &= \frac{1}{(b-a)(3b+a)}(bJ - (3b+a)I) \end{aligned}$$

La formule obtenu en (4)(b) reste valable pour $n = -1$.

Si $a \neq b$ et $a \neq -3b$, $A^{-1} = (a-b)^{-1}I + \frac{1}{4} \left((a+3b)^{-1} - (a-b)^{-1} \right) J$.

Variante : Si $a \neq b$ et $a \neq -3b$, on pose $B = (a-b)^{-1}I + \frac{1}{4} \left((a+3b)^{-1} - (a-b)^{-1} \right) J$. On a alors

$$\begin{aligned} AB &= ((a-b)I + bJ) \left(\frac{1}{a-b}I + \frac{1}{4} \frac{a-b-a-3b}{(a+3b)(a-b)}J \right) \\ &= ((a-b)I + bJ) \left(\frac{1}{a-b}I - \frac{b}{(a+3b)(a-b)}J \right) \\ &= I^2 - \frac{b}{a+3b}IJ + \frac{b}{a-b}JI - \frac{b^2}{(a+3b)(a-b)}J^2 \\ &= I - \frac{b}{a+3b}J + \frac{b}{a-b}J - \frac{4b^2}{(a+3b)(a-b)}J \\ &= I + \frac{-b(a-b) + b-a+3b - 4b^2}{(a+3b)(a-b)}J \\ &= I + \frac{-ab + b^2 + ab + 3b^2 - 4b^2}{(a+3b)(a-b)}J \\ &= I + 0J = I \end{aligned}$$

Donc on a bien $B = A^{-1}$, autrement dit

$$\boxed{\text{si } a \neq b \text{ et } a \neq -3b, A^{-1} = (a - b)^{-1}I + \frac{1}{4} \left((a + 3b)^{-1} - (a - b)^{-1} \right) J.}$$

Exercice 3 - Probabilités

1. $\{A_1, \overline{A_1}\}$ est un système complet d'événements fini donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = P(Bl_1) = P(A_1)P_{A_1}(Bl_1) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(Bl_1) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{a + b}{2}.$$

Cherchons à calculer q_2 . Tout d'abord, on a $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap Bl_1$ car conserver l'urne A au second tirage équivaut au fait de tirer une boule blanche au premier tirage. De même, $\overline{A_1} \cap A_2 = \overline{A_1} \cap \overline{Bl_1}$. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} q_2 &= P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1 \cap Bl_1) + P(\overline{A_1} \cap \overline{Bl_1}) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(Bl_1) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{Bl_1}) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(1 - b) = \frac{1 + a - b}{2} \end{aligned}$$

Finalement, puisque $\{A_2, \overline{A_2}\}$ est un système complet d'événements fini, on obtient :

$$\begin{aligned} p_2 &= P(Bl_2) = P(A_2)P_{A_2}(Bl_2) + P(\overline{A_2})P_{\overline{A_2}}(Bl_2) = q_2a + (1 - q_2)b \\ &= \frac{a + a^2 - ab}{2} + \frac{1 - a + b}{2}b = \frac{a + a^2 - ab + b - ab + b^2}{2} = \frac{a + b + (a - b)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{p_1 = \frac{a + b}{2}, \quad q_2 = \frac{1 + a - b}{2} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{a + b + (a - b)^2}{2}.}$$

2. Soit $n \in \llbracket 2, N \rrbracket$, $\{A_{n-1}, \overline{A_{n-1}}\}$ est un système complet d'événements fini. De plus on a, pour les mêmes raisons qu'à la question 1, $A_{n-1} \cap A_n = A_{n-1} \cap Bl_{n-1}$ et $\overline{A_{n-1}} \cap A_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{Bl_{n-1}}$. Ainsi, la formule des probabilités totales nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} q_n &= P(A_n) = P(A_{n-1} \cap A_n) + P(\overline{A_{n-1}} \cap A_n) = P(A_{n-1} \cap Bl_{n-1}) + P(\overline{A_{n-1}} \cap \overline{Bl_{n-1}}) \\ &= P(A_{n-1})P_{A_{n-1}}(Bl_{n-1}) + P(\overline{A_{n-1}})P_{\overline{A_{n-1}}}(\overline{Bl_{n-1}}) = q_{n-1}a + (1 - q_{n-1})b \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \llbracket 2, N \rrbracket, q_n = q_{n-1}(a + b - 1) + 1 - b.}$$

3. $(q_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique. De plus a et b appartiennent à $]0, 1[$ donc $a + b \in]0, 2[$ et, en particulier, $2 - (a + b) \neq 0$. Ainsi

$$x = (a + b - 1)x + 1 - b \iff (2 - (a + b))x = 1 - b \iff x = \frac{1 - b}{2 - (a + b)}.$$

La suite $\left(q_n - \frac{1 - b}{2 - (a + b)} \right)_n$ est géométrique de raison $(a + b - 1)$ d'où, pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$q_n - \frac{1 - b}{2 - (a + b)} = (a + b - 1)^{n-1} \left(q_1 - \frac{1 - b}{2 - (a + b)} \right).$$

$$q_n = (a + b - 1)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - b}{2 - (a + b)} \right) + \frac{1 - b}{2 - (a + b)} = (a + b - 1)^{n-1} \frac{2 - (a + b) - 2 + 2b}{2(2 - (a + b))} + \frac{1 - b}{2 - (a + b)}.$$

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, q_n = (a + b - 1)^{n-1} \frac{b - a}{2(2 - (a + b))} + \frac{1 - b}{2 - (a + b)}.$$

Soit $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\{A_n, \overline{A_n}\}$ étant un système complet d'événements fini, la formule des probabilités totales nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} p_n &= P(B|A_n) = P(A_n)P_{A_n}(B|A_n) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(B|A_n) = q_n a + (1 - q_n)b = (a - b)q_n + b \\ &= -(a + b - 1)^{n-1} \frac{(b - a)^2}{2(2 - (a + b))} + \frac{(1 - b)(a - b)}{2 - (a + b)} + b \\ &= \frac{a - ab + b^2 - b + 2b - ab - b^2}{2 - (a + b)} - (a + b - 1)^{n-1} \frac{(b - a)^2}{2(2 - (a + b))}. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, p_n = \frac{a + b - 2ab}{2 - (a + b)} - (a + b - 1)^{n-1} \frac{(b - a)^2}{2(2 - (a + b))}.$$

Exercice 4 - Inspiré EDHEC 2001

Partie 1

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. On remarque que $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{n+1}$. On a alors le programme suivant :

```
v = 1
for k = 2:n
    v = v + 1/k
end
disp(v)
```

2. Soit $k > 1$. On a pour tout $x \in [k - 1; k]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &\leq \frac{1}{x} \implies \int_{k-1}^k \frac{1}{k} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x} \\ &\implies \frac{k - (k - 1)}{k} \leq [\ln(x)]_{k-1}^k \\ &\implies \boxed{\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k - 1)} \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de la question précédente, on a

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) - \ln(k - 1)$$

Or d'une part $v_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ et d'autre part on reconnaît une somme télescopique sur la somme de droite :

$$\sum_{k=2}^n \ln(k) - \ln(k - 1) = \ln(n) - \ln(2 - 1) = \ln(n)$$

On en déduit que

$$v_n \leq \ln(n) + 1.$$

Partie 2

On considère une suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. (a) On montre par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \text{ est positif et } u_n > 0\}$

- **Initialisation** : On a $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors $u_n > 0$ et $\frac{1}{u_n} > 0$ donc u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$.

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion** : u_n existe et $u_n > 0$.

- (b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$$

La suite (u_n) est strictement croissante.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} u_{k+1}^2 &= \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 \\ &= u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend la somme de chaque côté et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} 2 + \frac{1}{u_k^2} \iff u_n^2 - u_0^2 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \\ &\iff u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \end{aligned}$$

- (c) On a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} > 0$ et donc $u_n^2 \geq 2n + 1$.

3. (a) D'après le résultat précédent pour tout $k \geq 1$

$$u_k^2 \geq 2k + 1 \geq 2k \iff \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{2k}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} &= \frac{1}{u_0^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} v_{n-1}\end{aligned}$$

Ainsi, on déduit

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

(b) En utilisant la partie 1, on établit que

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + 1)$$

Ainsi

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$